Úvod

V tomto textu rozepíšu cvičení 25.10. podrobněji. Text berte spíš jako pro zajímavost, nebo k doplnění přednášky. Pokud nakonec všechno, co tu je napsáno pochopíte, máte jistotu, že dobře rozumíte pojmu limita.

Pomocí věty o aritmetice limit můžeme počítat limity typu

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P a Q jsou polynomy. Abychom ale mohli počítat nějaké zajímavější limity, budeme potřebovat vědět, že funkce exp, ln, sin, cos atd. jsou spojité a navíc, že platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{1}$$

a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{2}$$

Ve skutečnosti, tyto informace, jejich jednoduché důsledky a dostatečná početní praxe vám postačí k výpočtu všech limit (z funkcí), se kterými se během studia potkáte. Nicméně pro určité limity jako např.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x + \cos x - 2x - 2}{x^4} = \frac{1}{12}$$

bude výhodnější použít silnější nástroje (jako L'Hospitalovo pravidlo nebo Taylorovy řady), které se naučíte později. Někdo by mohl namítnout, že limity (1) a (2) jsou důsledky právě L'Hospitalova pravidla (které není až tak těžké si odvodit). To by byla pravda, pokud byste uměli dokázat, co je derivace sinu a exponenciely. To ovšem vede zpátky na limity (1) a (2), neboť (1) nebo (2) přesně znamená, že derivace exponenciely nebo sinu v bodě 0 je 1.

Co je to e?

Číslo e se objevuje v mnoha matematických vzorcích, takže se nabízí mnoho možností jak ho definovat. Použijeme vzorec, ke kterému stačí pouze znalost limity posloupnosti a ze kterého je poměrně snadné odvodit všechny vlastnosti, které e má mít (ve skutečnosti, jediná důležitá vlastnost je právě (1)).

Připomeňme, že Bernoulliho nerovnost platí ve tvaru

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad x \in [-2, \infty), \quad n \in \mathbb{N}$$

(viz druhé cvičení, indukce).

Nechť

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{and} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Posloupnost a_n je rostoucí, neboť pomocí Bernoulliho nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \\ &\geq \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1\end{aligned}$$

pro všechny $n \in \mathbb{N}$. Podobně můžeme ukázat, že b_n je klesající (bylo na cvičení). Zároveň je evidentní, že

$$a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

takže také platí např.

$$a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

To znamená, že posloupnosti a_n a b_n jsou omezené. Z toho už plyne, že limity posloupností a_n a b_n existují (a jsou konečné) a platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n \in \mathbb{R}.$$

Ověřím to např. pro b_n (a_n bylo na cvičení). Chci ověřit existenci limity, tj. nechť $\varepsilon > 0$. Z definice infima plyne, že existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ (resp. existuje prvek b_{n_0}) tak, že

$$b_{n_0} < \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n + \varepsilon.$$

Odtud, protože b_n je klesající, dostávám

$$b_k < \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n + \varepsilon \quad \forall k \geq n_0.$$

To je ekvivalentní s

$$|b_k - \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n| < \varepsilon \quad \forall k \geq n_0,$$

neboť infimum je dolní mez a výraz v absolutní hodnotě je kladný. To je ale přesně definice limity $\lim_{k\to\infty} b_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Poznámka: analogické tvrzení platí i pro limity funkcí: je-li f rostoucí (nebo aspoň neklesající) na nějakém levém okolí $(x_0 - \delta, x_0)$ bodu x_0, pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \sup\{f(x);\ x \in (x_0 - \delta, x_0)\}.$$

Je-li navíc f omezená v tomto (nebo menším) okolí, pak ta limita i supremum jsou konečné. Podobně zprava a také pro klesající (nerostoucí) funkce.

Ověřil jsem tedy, že čísla

$$e_1 := \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{a} \quad e_2 := \lim_{n\to\infty} b_n.$$

jsou těmi limitami dobře definovaná. Navíc, podle aritmetiky limit platí

$$e_2 = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \lim_{n\to\infty} a_n = e_1,$$

takže konečně definuji

$$e := e_1 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Jako důsledek předchozího dostávám nerovnost

$$a_n < e < b_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

kterou využiju níže.

Jak umocňovat na iracionální exponent?

Než přejdeme k důkazu (1), musíme si ujasnit, co vůbec znamená výraz e^x, $x \in \mathbb{R}$. Uvědomte si, že jediná mocnina, kterou pomocí středoškolských znalostí umíte spočítat je

$$w^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{w^p}, \quad w \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}$$

a to ještě stěží, protože pro $q > 1$ to zahrnuje použití jisté inverzní funkce (odmocnina). Co ale dělat, když exponent není racionální číslo? Jak např. spočtu $e^{\sqrt{2}}$, nebo jen $2^{\sqrt{2}}$?

Zaměřme se nyní na funkci

$$f(x) = e^x := \sqrt[q]{e^p}, \quad x = \tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q},$$

definice všech ostatních mocnin nakonec přirozeně vyplyne z definice f. Funkci f tedy umíme definovat (počítat) ve všech racionálních bodech a chceme ji dodefinovat i v bodech iracionálních. To se dá ve skutečnosti udělat mnoha způsoby[1] (mějte na paměti jak vypadá Dirichletova, Riemannova funkce apod.), ale my budeme navíc požadovat, aby výsledná funkce byla spojitá. To z toho důvodu, aby byla šance, že platí např. známý vztah $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, (nutnou podmínkou existence derivace je spojitost). Nechť tedy $x \in \mathbb{R}$ je nějaký iracionální bod. Z vlastností reálných čísel víme, že pro

[1] Pokud předpokládáme, že platí axiom výběru. Na přednáškách na matfyzu se tento axiom předpokládá vždycky a jinde většinou taky.

každé $\varepsilon > 0$ existuje $q \in \mathbb{Q}$ tak, že $|x - q| < \varepsilon$. Volíme-li $\varepsilon := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, dostaneme posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$, splňující

$$\lim_{n\to\infty} q_n = x.$$

Navíc posloupnost q_n můžeme jistě zvolit tak, aby byla rostoucí (můžete si např. představit že přidáváme jednotlivé cifry z desetinného rozvoje x, nebo že místo $\{q_n\}_n$ vezmu $\{\inf_{k\geq n} q_k\}_n$, která je vždy neklesající). Protože i funkce f je rostoucí v $\mathbb{Q}$ (rozmyslete si - převeďte mocniny na společného jmenovatele), posloupnost $\{f(q_n)\}$ je také rostoucí. Navíc je shora omezená např. číslem $f([x]+1)$, kde [ ] značí celou hodnotu. Tudíž, podle tvrzení dokázaného výše existuje konečná limita $\lim_{n\to\infty} f(q_n)$ a funkci f můžeme dodefinovat jako

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \tag{4}$$

Musíme ještě ověřit, že tato definice nezávisí na tom, jakou rostoucí posloupnost $\{q_n\}$ použijeme v (4). Nechť $\{p_n\}$ a $\{q_n\}$ jsou dvě takové posloupnosti konvergující k $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Víme už, že existují limity $K := \lim_{n\to\infty} p_n$, $L := \lim_{n\to\infty} q_n$ a potřebujeme ukázat, že jsou stejné. Buď $\varepsilon > 0$. Z definice limity obdržíme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí $f(p_{n_0}) > K - \varepsilon$. Protože $p_{n_0} < x$ a $\lim_{n\to\infty} q_n = x$, existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $p_{n_0} < q_{m_0}$. Pak ale, díky vlastnostem f na $\mathbb{Q}$, platí

$$K - \varepsilon < f(p_{n_0}) < f(q_{m_0}) < L.$$

Jelikož $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, dostáváme $K \leq L$. Protože obrácenou nerovnost můžeme dokázat naprosto analogicky, platí $K = L$.

Máme tedy definovaný výraz e^x pro všechny $x \in \mathbb{R}$. Definice uvedená výše (tj. "zespojitění") je výhodná v tom, že můžeme s e^x pracovat jak jsme zvyklí i v iracionálních bodech. Pokud totiž $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou rostoucí poslupnosti racionálních čísel konvergující k iracionálním číslům x a y, pak $\{p_n + q_n\}$ je rostoucí s limitou $x + y$ a

$$e^x e^y = \lim_{n\to\infty} e^{p_n} \lim_{n\to\infty} e^{q_n} = \lim_{n\to\infty} (e^{p_n} e^{q_n}) = \lim_{n\to\infty} e^{p_n+q_n} = e^{x+y},$$

díky aritmetice limit. V dalších sekcích ověříme, že takto definovaná exponenciela je spojitá a splňuje (1).

Pomocí e^x můžeme zavést i ostatní mocninné a exponenciální funkce. Nejdříve ale ověříme klíčovou vlastnost exponenciely, totiž že $e^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ je rostoucí (zatím to víme pouze pro racionální argumenty): Buď $y < x$. Nechť např. y je racionální a x iracionální. Protože q_n konverguje zleva k x, od určitého n_0 bude platit $y < q_n < x$, $n \geq n_0$. Pak ale $f(y) < f(q_n)$ a tudíž, díky monotonii posloupnosti $\{f(q_n)\}$, dostaneme

$$f(y) < f(q_n) < \lim_{n\to\infty} f(q_n) = f(x).$$

Ostatní případy se udělají analogicky. Protože tedy f je rostoucí, je také prostá a proto existuje její inverzní funkce, kterou označíme

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Konečně můžeme definovat obecnou mocninu:

$$y^x := e^{x \ln y}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in (0, \infty).$$

Jakmile dokážeme spojitost e^x a ln, spojitost obecné mocniny vyplyne z její definice a z aritmetiky limit. Všimněte si, že v definici nepřipouštíme záporné základy, což je v pořádku, protože víme, že ke správné definici výrazů typu $(-1)^x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, je potřeba přejít do oboru komplexních čísel.

Limita (1)

Z nerovnosti (3) plyne $a_{n+1} < e < b_{n-1}$, tj.

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1. \tag{5}$$

Nechť $x \in (0, \frac{1}{2})$. Najdu si $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}.$$

Pokud těmito třemi exponenty umocním postupně výrazy v (5), nerovnost se zachová a dostanu

$$1 + \frac{1}{n+1} < e^x < 1 + \frac{1}{n-1},$$

tj.

$$\frac{1}{n+1} < e^x - 1 < \frac{1}{n-1}.$$

Toto byl klíčový krok, kde jsem využil, že už vím, co znamená e^x, $x \in \mathbb{R}$, a hlavně, že obecná exponenciela tak jak jsem ji definoval je rostoucí na $\mathbb{R}$, pokud je její základ větší než 1. Nyní si ověřte, že $x \leq \frac{1}{n}$ je ekvivalentní s

$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{x}{x+1}$$

a $x > \frac{1}{n+1}$ je ekvivalentní s

$$\frac{1}{n-1} < \frac{x}{1-2x}.$$

Odtud dostávám nerovnost

$$\frac{x}{x+1} < e^x - 1 < \frac{x}{1-2x},$$

tj.

$$\frac{1}{1+x} < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-2x}, \quad x \in (0, \tfrac{1}{2}).$$

Podle věty o limitě sevřené posloupnosti (o 2 strážnících) dostávám

$$1 = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1+x} \leq \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1}{x} \leq \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1-2x} = 1,$$

a tedy

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Pro $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ postupuji analogicky: Zvolím $n \in \mathbb{N}$, aby $-\frac{1}{n} < x \leq -\frac{1}{1+n}$, tzn.

$$\frac{1}{n+1} \leq -x < \frac{1}{n}.$$

Odtud, umocněním (5) se obrátí pořadí nerovností a dostávám

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} < e^x < \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}$$

a po úpravě

$$-\frac{1}{n} < e^x - 1 < -\frac{1}{n+2}.$$

Díky volbě n platí $\frac{x}{1+x} \leq -\frac{1}{n}$ a $-\frac{1}{n+2} < \frac{x}{1-2x}$, takže

$$\frac{x}{1+x} < e^x - 1 < \frac{x}{1-2x}, \quad x \in (-\tfrac{1}{2}, 0)$$

a po vydělení x:

$$\frac{1}{1-2x} < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1+x}, \quad x \in (-\tfrac{1}{2}, 0).$$

Limitním přechodem $\lim_{x \to 0-}$ pak získávám

$$\lim_{x \to 0-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Protože limity zprava a zleva se rovnají, limita (1) existuje a rovná se jedné.

Stojí za to si uvědomit, že e^x je jediná exponenciální funkce, která splňuje (1), tzn. že tato funkce protíná osu y pod úhlem 45°. To proto, že

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \lim_{x \to 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} = \ln a,$$

kde jsem použil lineární substituci $y = x \ln a$ (pro složitější substituce je potřeba ověřit předpoklady věty o limitě složené funkce).

Spojitost e^x, $\ln x$

Použitím limity (1) dostáváme v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, že

$$\lim_{x\to x_0} e^x = \lim_{x\to x_0} (e^{x_0}(e^{x-x_0}-1)+e^{x_0}) = \lim_{x\to x_0}\left(e^{x_0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}(x-x_0)+e^{x_0}\right)$$
$$= e^{x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+e^{x_0} = e^{x_0}\cdot 1\cdot 0+e^{x_0} = e^{x_0},$$

a tedy e^x je spojitá v $\mathbb{R}$. Podle věty o spojitosti inverzní funkce je i ln spojitá v $(0,\infty)$.

Spojitost gon. funkcí a limita (2)

Vyjdeme z klasické definice gon. funkcí pomocí poměrů stran v pravoúhlém trojúhelníku a z definice čísla π jako obsah kruhu s poloměrem 1. Tato definice udává sinus na $(0,\frac{\pi}{2})$. Pak dodefiujeme $\sin 0 := 0$, $\sin\frac{\pi}{2} := 1$ a

$$\sin x := -\sin(-x), \quad x\in[-\tfrac{\pi}{2},0).$$

Dále, na intervalu $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ můžu dodefinovat osově symetricky podle svislé přímky procházející $\frac{\pi}{2}$, tzn.

$$\sin(x) := \sin(\tfrac{\pi}{2}-x), \quad x\in(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{3\pi}{2}].$$

Tím jsem definoval sin na $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ a dále už můžu dodefinovat 2π-periodicky na $\mathbb{R}$. Tak dostanu funkci sinus s grafem, který znám.

Funkci cos pak definuji např. vztahem

$$\cos(x) := \sin(\tfrac{\pi}{2}-x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Dále můžeme definovat tan, cot apod. Pro takto definované goniometrické funkce platí všechny gon. identity, které znáte.

Když si nakreslíte úhel x radiánů v jednotkové kružnici a porovnáte obsahy vnitřního trojúhelníka, výseče a vnějšího trojúhelníka, obdržíte[2] nerovnost

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2\pi}\cdot\pi < \frac{\tan x}{2}, \quad x\in(0,\tfrac{\pi}{2}),$$

což je

$$\sin x < x < \tan x, \quad x\in(0,\tfrac{\pi}{2}). \tag{6}$$

Odtud, protože funkce sin a x jsou liché, plyne

$$|\sin x| \le |x|, \quad x\in(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})$$

(v případě pochybností si udělejte obrázek).

Nechť $\varepsilon > 0$. Pak, zvolím-li $\delta := \varepsilon$, platí

$$|\sin x - \sin 0| = |\sin x| \le |x| < \varepsilon \quad \forall x\in(-\delta,\delta).$$

Tím je dokázána spojitost sinu v nule, tj., že

$$\lim_{x\to 0}\sin x = \sin 0 = 0.$$

Pro kosinus využiji identitu

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}, \quad x\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}],$$

spojitost odmocniny (ta plyne z toho co je výše a z $\sqrt{y} = e^{\frac{1}{2}\ln y}$), aritmetiku limit a spojitost sinu v 0. Tak dostanu

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-(\lim_{x\to 0}\sin x)^2} = 1 = \cos 0,$$

[2] Zde ovšem využívám toho, že umíte spočítat obsah kruhu, což není až tak triviální, jak by se mohlo zdát. Aby to bylo úplně korektní, potřebovali bychom určitý integrál.

takže i kosinus je spojitý v 0.

Pro libovolný bod $x_0 \in \mathbb{R}$ pak podle součtových vzorců a spojitosti sin, cos v 0 máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \sin x &= \lim_{x\to x_0} \sin(x_0 + (x - x_0)) = \lim_{x\to x_0} (\sin x_0 \cos(x - x_0) + \sin(x - x_0) \cos x_0) \\ &= \sin x_0 \lim_{h\to 0} \cos h + \cos x_0 \lim_{h\to 0} \sin h = \sin x_0,\end{aligned}$$

kde jsem použil jednoduchou substituci $h = x - x_0$ (rozmyslete si, co taková substituce udělá v definici limity). To znamená, že sin je spojitá funkce v $\mathbb{R}$. Spojitost kosinu můžu udělat analogicky a pak také snadno odvodit spojitost tangensu (tam, kde je definovaný) atd.

Pokud nerovnost (6) vydělím nenulovým číslem $\sin x$, dostanu

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad x \in (0, \tfrac{\pi}{2}).$$

Odtud, aplikováním limity $\lim_{x\to 0+}$ a použitím věty o dvou strážnících dostanu

$$1 \le \lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sin x} \le \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Protože $x/\sin x$ je sudá funkce, platí také

$$\lim_{x\to 0-} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

takže

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Z aritmetiky limit pak konečně plyne (2).

Poznámka na konec

Až budete umět Taylorovy řady, tak všechno, co je tady odvozeno dostanete okamžitě, protože pro sinus a exponencielu (a další funkce) použijete jinou definici a pomocí obecných vět odvodíte všechny vlastnosti, které mají e^x a sin mít. Tato definice však není vůbec intuitivní. Na druhou stranu, v tomto textu jsme si vystačili pouze s relativně elementárními pojmy (až na obsah kruhu).